6.3 Die Kreisbewegung

6.3.1 Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

Bei einer ***Kreisbewegung*** bewegt sich ein Körper auf einer Kreislinie.

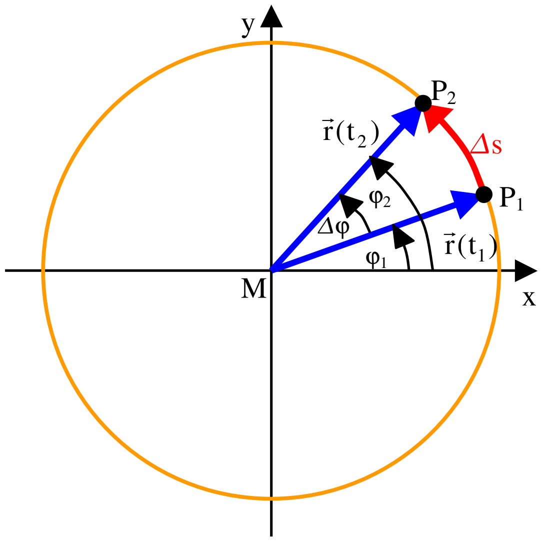
Da es sich um eine 2-dimensionale Bewegung handelt, werden zur Beschreibung der Bahn zwei Koordinaten benötigt. Fasst man diese beiden Koordinaten zusammen, so erhält man den

$$\textbf{\textit{Ortsvektor}}\ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

des Körpers. Die beiden Komponenten x=x(t) und y=y(t) sind Funktionen der Zeit t, deshalb ist auch der Ortsvektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$ eine Funktion der Zeit.

Als Koordinatenursprung wählt man zweckmäßigerweise den Mittelpunkt M des Kreises mit dem Radius r. Zum Zeitpunkt t=0 befinde sich der Körper auf der positiven x-Achse.

Bezeichnungen und Definitionen



- ***Drehwinkel φ*** = Winkel um den sich der Ortsvektor $\vec{r}$ im Zeitintervall Δt dreht.

  Der Drehwinkel wird üblicherweise gegen den Uhrzeigersinn gemessen, $\varphi = 0$ entspricht der positiven x-Achse.

  Bewegt sich ein Körper im Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ vom Punkt P_1 zum Punkt P_2, so legt er auf der Kreislinie den Weg Δs (= Länge des Kreisbogens von P_1 nach P_2) zurück. Dabei hat sich der Drehwinkel um $\Delta\varphi$ von φ_1 auf φ_2 erhöht.

  Zwischen Bogenlänge und Drehwinkel besteht die Beziehung

  $\boxed{\Delta s = \frac{\pi \cdot r}{180°} \cdot \Delta\varphi}$, wobei $\Delta\varphi$ in Grad angegeben wird.

  Gibt man dagegen φ im Bogenmaß an, so gilt: $\boxed{\Delta s = r \cdot \Delta\varphi}$

  Im Allgemeinen wird φ im Bogenmaß angegeben.

- ***Winkelgeschwindigkeit ω*** = die Änderung des Drehwinkels $\Delta\varphi$ im Zeitintervall Δt

  somit gilt: $\boxed{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$ $\Rightarrow$ Einheit $[\omega] = \frac{1\,\text{rad}}{1\,\text{s}} = 1\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

  Hinweis: Wir betrachten nur **Kreisbewegungen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit**.

- ***Umlaufdauer T*** = Zeit für eine volle Umdrehung, d. h. für $\Delta\varphi = 2\pi$.

  somit gilt: $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{bzw.} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}}$

- ***Frequenz f*** = Anzahl der Umdrehungen k in der Zeit t,

  somit gilt: $\boxed{f = \frac{k}{t}}$ $\Rightarrow$ Einheit $[f] = \frac{1}{1\,\text{s}}$ =1 Hz = 1 ***Hertz***

  Speziell für k=1 folgt: $t = T \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{T} \quad \text{bzw.} \quad T = \frac{1}{f}}$

  mit $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$ folgt: $\boxed{\omega = 2\pi \cdot f \ \text{bzw.}\ f = \frac{\omega}{2\pi}}$

6.3 Die Kreisbewegung

- ***Bahngeschwindigkeit v*** = Geschwindigkeit des Körpers auf der Kreisbahn

  Es gilt: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \omega$, also $\boxed{v = r \cdot \omega}$

  Hinweis: Die Bahngeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, die der Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt besitzt. Wenn ω konstant ist, dann ist auch die Bahngeschwindigkeit vom Betrag her zu jedem Zeitpunkt konstant. Dann gilt $v \sim r$.

Beispiel:

Eine veraltete Langspielplatte, kurz LP, hatte einen Durchmesser von 30cm drehte sich einst mit $33\frac{1}{3}$ Umdrehungen pro Minute. Berechne f, T, ω, v am Plattenrand sowie den Drehwinkel nach 3min bzw. nach 45min.

Lösungen: f=0,56Hz; T=1,8s; ω=3,5rad/s; v=0,52m/s; φ(3min)=630rad=36100°(=100Umdr.); φ(45min)=$5{,}4\cdot 10^5$ °

6.3.2 Die Bewegungsgleichungen bei der Kreisbewegung

Allgemein gilt:

Die Ableitung der Ortsfunktion r(t) ist gleich der Geschwindigkeitsfunktion v(t), also $v(t) = \dot{r}(t)$.

Die Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion v(t) ist gleich der Beschleunigungsfunktion a(t), also $a(t) = \dot{v}(t)$.

Diese Beziehungen gelten auch bei mehrdimensionalen Bewegungen bei denen das Superpositionsprinzip gilt, also auch bei der Kreisbewegung.

Aus dem ***Ortsvektor*** $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ folgen somit der

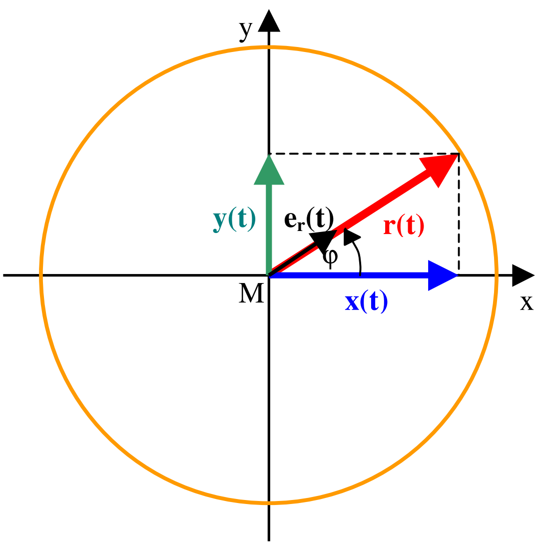
der ***Geschwindigkeitsvektor*** $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$ und

der ***Beschleunigungsvektor*** $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix}$

Herleitung des Ortsvektors

Die ***Länge des Ortsvektors*** ist zu jedem Zeitpunkt gleich dem Radius r, also konstant.

Kurz: $|\vec{r}(t)| = r$.



Es sei φ(0) = 0. Dann gilt für die beiden Komponenten des Ortsvektors:

$x(t) = r\cdot\cos\varphi = r\cdot\cos\omega t$

$y(t) = r\cdot\sin\varphi = r\cdot\sin\omega t$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos\omega t \\ r\cdot\sin\omega t \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} = r\cdot\vec{e}_r(t)$$

Der Vektor $\boxed{\vec{e}_r(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix}}$ hat die Länge 1 und zeigt zu jedem Zeitpunkt t in die Richtung des Ortsvektors.

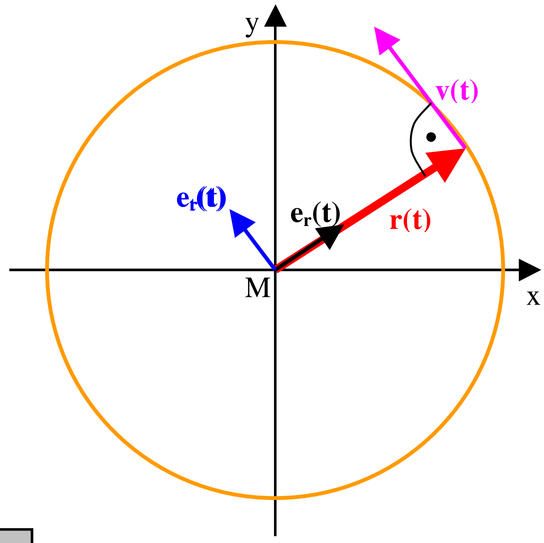
Er heißt deshalb ***Einheitsvektor in*** $\vec{r}$ ***-Richtung***.

Damit gilt für den ***Ortsvektor***: $\boxed{\vec{r}(t) = r\cdot\vec{e}_r(t)}$

6.3 Die Kreisbewegung

Herleitung des Geschwindigkeitsvektors

Die beiden Komponenten v_x und v_y des Geschwindigkeitsvektors erhält man dadurch, dass man die x- und y-Komponente des Ortsvektors einzeln ableitet. Es gilt also:



$$v_x(t) = \dot{x}(t) = \dot{\left(r \cdot \cos\omega t\right)} = r \cdot (-\sin\omega t) \cdot \omega$$

$$v_y(t) = \dot{y}(t) = \dot{\left(r \cdot \sin\omega t\right)} = r \cdot \cos\omega t \cdot \omega$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}(t) = r\omega \cdot \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix} = r\omega \cdot \vec{e}_t(t)$$

Entsprechend zu $\vec{e}_r(t)$ hat auch der Vektor $\vec{e}_t(t)$ die Länge 1, ist also ebenfalls ein Einheitsvektor. $\vec{e}_t(t)$ zeigt z jedem Zeitpunkt t in die Richtung des Geschwindigkeitsvektors.

Er heißt deshalb ***Einheitsvektor in*** $\vec{v}$ ***-Richtung***.

Man erkennt, dass $\vec{e}_t(t)$ auf $\vec{e}_r(t)$ senkrecht steht.

Folgerung:

Der Geschwindigkeitsvektor ist stets tangential zum Ortsvektor.

Damit gilt für den ***Geschwindigkeitsvektor***: $\boxed{\vec{v}(t) = r\omega \cdot \vec{e}_t(t)}$

Beachte:

Der Geschwindigkeitsvektor ändert ständig seine Richtung, hat aber den konstanten Betrag $\boxed{v = |\vec{v}| = r\omega}$.

D. h. der ***Betrag des Geschwindigkeitsvektors*** ist gleich der Bahngeschwindigkeit v.

Herleitung des Beschleunigungsvektors

Zur Erinnerung: Eine beschleunigte Bewegung liegt vor, wenn sich die Geschwindigkeit des Körpers ändert. Bei der Kreisbewegung ist zwar der Betrag der Geschwindigkeit zeitlich konstant, jedoch ändert sich ständig die Richtung des Geschwindigkeitsvektors. Damit ändert sich die Geschwindigkeit des Körpers und deshalb gilt:

Die Kreisbewegung ist eine beschleunigte Bewegung.

Die beiden Komponenten a_x und a_y des Beschleunigungsvektors erhält man analog durch Ableiten der beiden Geschwindigkeitskomponenten.

Es folgt für den ***Beschleunigungsvektor:*** $\boxed{\vec{a}(t) = -r\omega^2 \cdot \vec{e}_r(t)}$

Man erkennt:

1. Die ***Richtung des Beschleunigungsvektors*** zeigt stets entgegengesetzt zum Ortsvektor, ist also ***zum Kreismittelpunkt M hin gerichtet*** (= zentripetal).

   Die Beschleunigung wird deshalb als ***Zentripetalbeschleunigung*** bezeichnet.

2. Der ***Betrag des Beschleunigungsvektors*** ist zeitlich konstant, nämlich: $\boxed{a = |\vec{a}(t)| = r\omega^2}$.

3. Mit v = rω folgt: $\boxed{a = \frac{v^2}{r}}$.