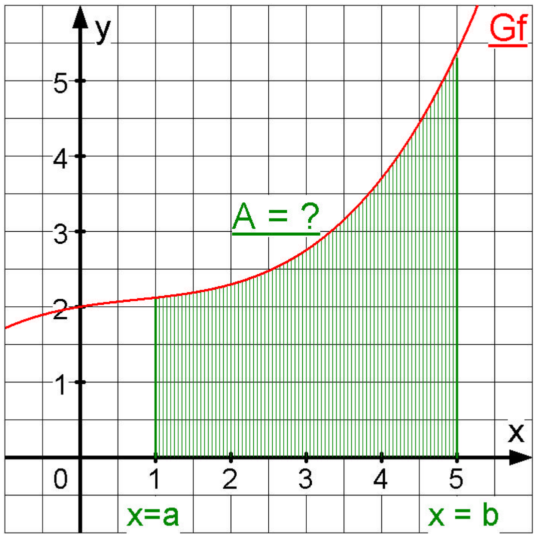
Integralrechnung kurzgefasst

1. Fläche unter einem Graphen

Die Einstiegsfrage lautet:

Wie kann man den **Flächeninhalt A eines Flächenstücks berechnen**, das begrenzt wird

- vom Graphen G_f einer (stetigen) Funktion
- von der x-Achse
- von zwei Parallelen zur y-Achse x = a und x = b

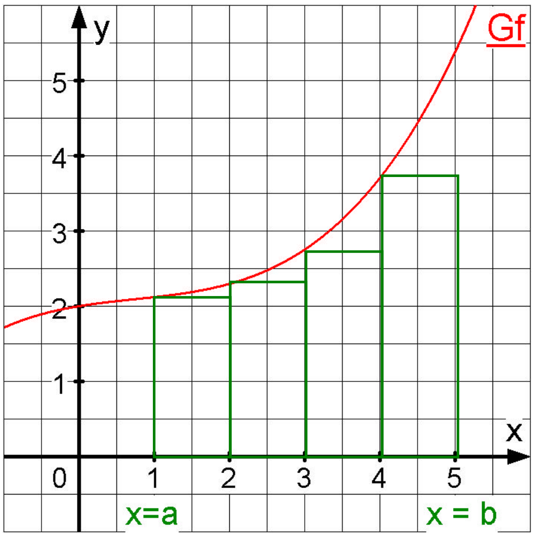


Lösung:

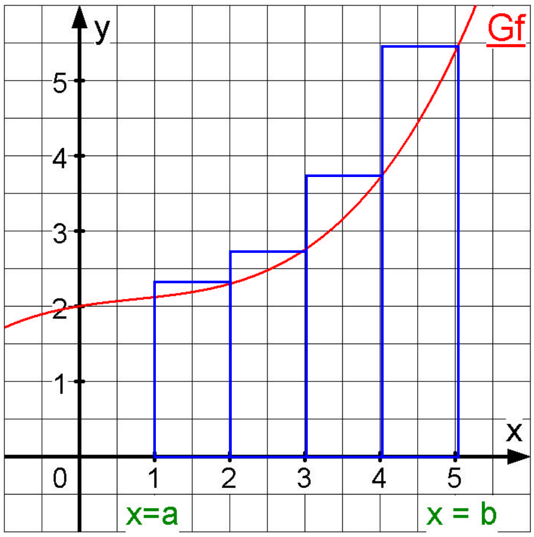
Die **Streifenmethode**

Man zerlegt das Intervall [a; b] in n gleiche Teile der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Über jedem Teil errichtet man ein Rechteck (Streifen) ausgehend von der x-Achse bis zum Graphen G_f. Summiert man alle Rechtecksflächen auf, so ergibt sich ein Näherungswert für den Flächeninhalt A. Je nachdem, ob man als Höhe des Streifens die linke oder rechte Begrenzung wählt, ist dieser Näherungswert etwas kleiner ($\Rightarrow$ Untersumme s_n) oder etwas größer ($\Rightarrow$ Obersumme S_n) als der tatsächliche Flächeninhalt.

Untersumme



Obersumme



Es gilt:

$$s_n = f(a)\cdot\Delta x + f(a+\Delta x)\cdot\Delta x + \ldots + f(a+(n-1)\Delta x)\cdot\Delta x$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\cdot\Delta x$$

$$S_n = f(a+\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+2\Delta x)\cdot\Delta x + \ldots + f(a+n\Delta x)\cdot\Delta x$$
$$= \sum_{k=}^{n} f(a+k\Delta x)\cdot\Delta x$$

Weiter gilt: $s_n \le A \le S_n$

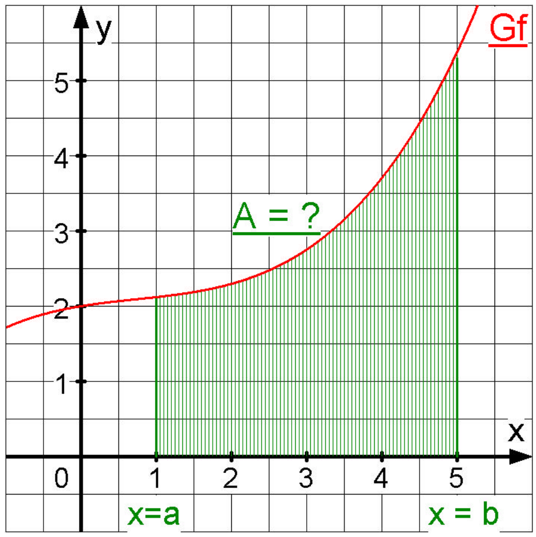
Unter- und Obersumme werden umso genauer mit A übereinstimmen, je größer n gewählt wird. Deshalb gilt für n gegen ∞:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = A = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Hinweise:

Ein wichtiger Schritt bei der Berechnung der Unter- und Obersumme ist das Umwandeln der Summe in ein Produkt, damit später die Grenzwertberechnung durchführbar ist. Dazu gibt es für einfache Summenausdrücke fertige Formeln (siehe Formelsammlung Seite 51, 4). Für einfache Funktionen wie f(x) = x, $f(x) = x^2$ usw. lassen sich diese Berechnung durchführen.

2. Das bestimmte Integral



Die Überlegungen in Kapitel 1 führen zur Definition des bestimmten Integrals.

Definition:

Das **bestimmte Integral von a nach b über f(x)** ist der Grenzwert der Summe aller Rechtecksflächen unter dem Graphen von f.

Also gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot \Delta x \ \text{ mit } \Delta x = \tfrac{b-a}{n}.$$

Bezeichnungen:

- **Integrandenfunktion** (= Integrand) **f**
- Integrationsvariable x
- dx als Schreibweise für Δx für $\Delta x \to 0$
- **untere Grenze** a, **obere Grenze** b

Hinweis:

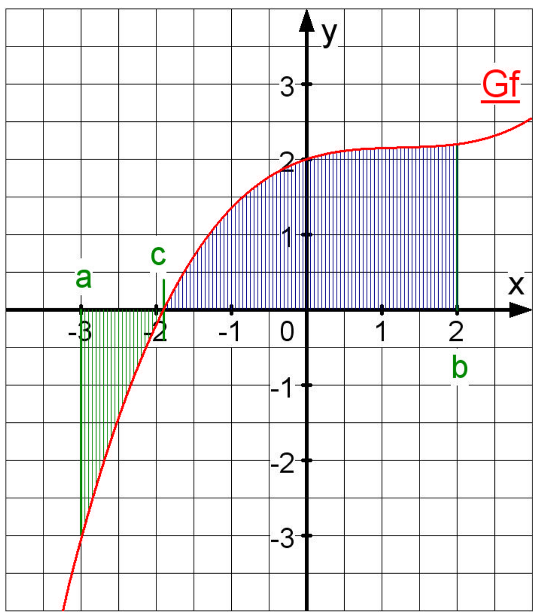
Das bestimmte Integral hat als Ergebnis eine reelle Zahl.

Zur geometrischen Deutung:

Im Allgemeinen verläuft ein Graph nicht nur oberhalb der x-Achse. Der Wert des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)dx$ stimmt nicht unbedingt mit dem entsprechenden Flächeninhalt von a nach b überein. Folgende Aussagen sind möglich:

- Ist $\int_a^b f(x)dx > 0$, so überwiegt der Anteil der Fläche, der oberhalb der x-Achse liegt.
- Ist $\int_a^b f(x)dx = 0$, so sind die Anteile der Flächen, die oberhalb und unterhalb der x-Achse liegen, gleich groß.
- Ist $\int_a^b f(x)dx < 0$, so überwiegt der Anteil der Fläche, der unterhalb der x-Achse liegt.

Beispiel:



In der nebenstehenden Abbildung ist c die Nullstelle der Funktion f.

Man erkennt:

- Die Fläche von a nach c verläuft unterhalb der x-Achse
  $$\Rightarrow \int_a^c f(x)dx < 0$$
- Die Fläche von c nach b verläuft oberhalb der x-Achse
  $$\Rightarrow \int_c^b f(x)dx > 0$$
- Der Anteil der Fläche oberhalb der x-Achse ist größer als der Anteil der Fläche unterhalb der x-Achse
  $$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$$

Eigenschaften des bestimmten Integrals (und damit Reglen für das Rechnen mit bestimmten Integralen):

- Zerlegen in Teilintervalle, d. h. es gilt: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (Vergleiche obige Abbildung)
- Konstanten vor das Integral ziehen, d. h. es gilt: $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$
- Linearität, d. h. es gilt: $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Definition der integrierbaren Funktion

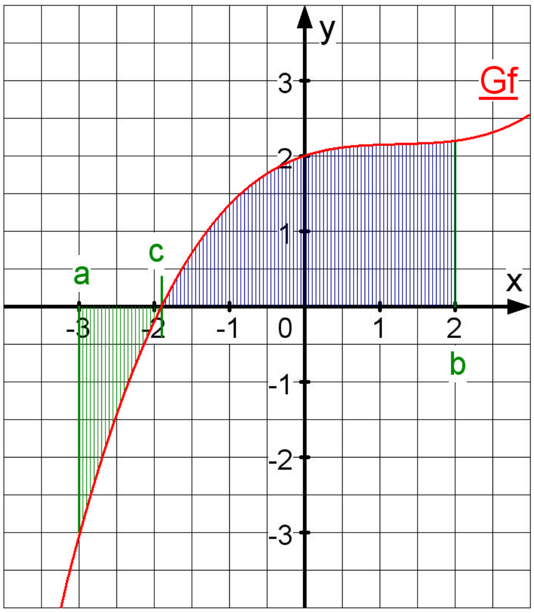
Eine stetige Funktion heißt **integrierbar** über [a; b], wenn das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ existiert.

Folgerung:
Es gilt: f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig $\Rightarrow$ f integrierbar

3. Berechnung von Flächeninhalten

Bei der **Berechnung von Flächeninhalten** gilt grundsätzlich:

- Flächenstücke, die oberhalb der x-Achse verlaufen werden positiv gezählt
- Flächenstücke, die unterhalb der x-Achse verlaufen werden negativ gezählt
- Hat ein Flächenstück sowohl Anteil oberhalb der x-Achse als auch unterhalb der x-Achse, so ist die Fläche entsprechend zu zerlegen. Dazu sind die **Nullstellen** der Funktion zu ermitteln.

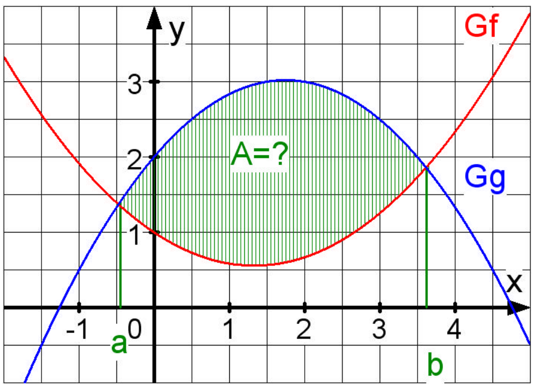


Beispiel:
Der Flächeninhalt A der insgesamt schraffierten Fläche im nebenstehenden Beispiel ergibt sich als Summe der Flächeninhalte A_{ac} von a nach c und A_{cb} von c nach b.
Die Berechnung der Nullstelle (Ansatz f(x) = 0) ergibt die Nullstelle x = c.

Dann gilt: $A = A_{ac} + A_{cb} = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \int_c^b f(x)dx$.

Berechnung der Fläche zwischen zwei Graphen

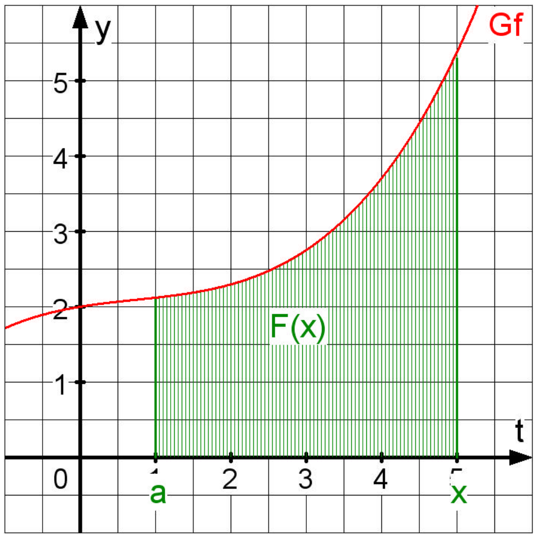
Der **Flächeninhalt A einer Fläche, die durch zwei Graphen G_f und G_g begrenzt wird**, ergibt sich als Differenz der Flächen unter dem Graphen von f und g jeweils von a nach b, wobei a und b die Schnittstellen der beiden Graphen sind. Damit diese Differenz immer positiv ist, ist der Betrag der Differenz zu nehmen.



Also gilt:

$$A = \left|\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx\right| = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right|dx = \begin{cases} \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx, & \text{falls } f(x) > g(x) \\ \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right)dx, & \text{falls } f(x) < g(x) \end{cases}$$

4. Die Integralfunktion



Lässt man bei einem bestimmten Integral die untere Grenze a fest und verändert die obere Grenze b, so hängt der Wert des bestimmten Integrals von b ab und kann als Funktion von b betrachtet werden.

Nach Umbennen ($x \to t$, $b \to x$) erhält man eine Funktion von x.

Definition der Integralfunktion

Die Funktion F mit

$$F: x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$ heißt **Integralfunktion** von f.

Hinweise:

- Eine Integralfunktion wird i. d. R. **integralfrei** gemacht, d. h. man berechnet (praktisch) das bestimmte Integral von a nach x. Später verwendet man besser die Integrationsregeln.
- Zu einer Integrandenfunktion f gibt es mehrere Integralfunktion F, je nach Wahl der unteren Grenze a.
- **Jede Integralfunktion hat mindestens eine Nullstelle**, nämlich an der unteren Grenze a ($F(0) = 0$).

Beispiel:

Zu $f(x) = x^2$ sind $F_1: x \mapsto \int_1^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}$, $F_0: x \mapsto \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3$ und $F_{1-}: x \mapsto \int_{-1}^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}$ mögliche Integralfunktion. Diese wurden auch integralfrei angegeben.

5. Die Stammfunktion

Betrachtet man alle Integralfunktion F zur gleichen Integrandenfunktion f, so erkennt man:

Alle Integralfunktion F zur gleichen Integrandenfunktion f haben den gleichen Stamm (im Beispiel: $\frac{1}{3}x^3$) und unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante. Ihre Graphen haben somit die gleiche Form und sind in y-Richtung verschoben.

Bildet man die Ableitung einer Integralfunktion F zu f, so erhält man f.

Dies führt zur

Defintion der Stammfunktion

Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** zu f, wenn ihre Ableitung f ist, also wenn gilt: $F'(x) = f(x)$.

Beispiel:

Mögliche Stammfunktion zu $f(x) = x^2$ sind: $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$, $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$, $F_{-4}(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4$ usw.,

also allgemein: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$, denn $\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right)' = x^2$.

Hinweise:

- Zwischen Integral- und Stammfuntkion besteht folgender Zusammenhang:
  Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion, aber nicht umgekehrt.
- Alle Stammfunktion F zu f unterscheiden sich durch eine additive Konstante c. D. h. kennt man eine Stammfunktion, so kennt man alle.

Beispiel:
Die Funktion $F(x) = x^2 + 1$ ist eine Stammfunktion zu $f(x) = 2x$, da $(x^2 + 1)' = 2x$. Sie ist aber keine Integralfunktion zu $f(x) = 2x$, da gilt $x^2 + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit die Eigenschaft, dass jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle besitzt, nicht erfüllt.

6. Das unbestimmte Integral

Definition des unbestimmten Integrals:

Die Menge aller Stammfunktionen zu einer Funktion f heißt **unbestimmtes Integral von f**, als Zeichen $\int f(x)dx$.

Also gilt: $\int f(x)dx = F(x) + c$ mit $F(x)' = f(x)$.

Hinweis:
Das unbestimmte Integral stellt eine Menge von Funktionen dar, nicht etwa eine Zahlenwert wie beim bestimmten Integral!

7. Integrationsformeln

Es gelten folgende **Integrationsformeln**:

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ $\qquad$ $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ $\qquad$ $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

Beweis durch Ableiten der Stammfunktion.

8. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Die folgende Aussage wird als **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)** bezeichnet:

Jede Integralfunktion einer stetigen Funktion f ist differenzierbar. Ihre Ableitung ist f.

$$(F(x))' = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

Hinweis:
Die **Integralrechnung ist damit die Umkehrung der Differentialrechnung**.

9. Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen

Aufgrund des HDI lässt sich die Berechnung eines bestimmten Integrals mit Hilfe von Stammfunktionen durchführen. Es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Hinweis:
Man ermittelt zunächst eine Stammfunktion F zu f. Der Wert des bestimmten Integrals ist der Wert der Stammfunktion an der oberen Grenze minus dem Wert der Stammfunktion an der unteren Grenze.

Beispiel:

$$\int_1^3 \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right)dx = \left[\tfrac{1}{6}x^3 - x^2 + x\right]_1^3 = \left(\tfrac{1}{6}\cdot 3^3 - 3^2 + 3\right) - \left(\tfrac{1}{6}\cdot 1^3 - 1^2 + 1\right) = -1\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} = \underline{\underline{-1\tfrac{2}{3}}}$$

Beachte: Da der Integralwert negativ ist, stellt dieser Wert nicht den Flächeninhalt unter der Kurve dar. Man kann nur feststellen, dass von der gesamten Fläche unter dem Graphen mehr Anteile unterhalb der x-Achse liegen als oberhalb.