Übungsaufgaben zu gebrochen rationalen Funktionen

1. Bestimme den maximalen Definitionsbereich und bilde die erste Ableitung:

a) $f(x) = \frac{2}{x^2}$

b) $f(x) = 4x^3 + \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

d) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

e) $f(x) = \frac{2x-4}{1-x}$

f) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$

g) $f(x) = \frac{x^2-a}{x^3}$; $a \in$

h) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

i) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

j) $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+4}$

k) $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2}$

l) $f(x) = \frac{4-x}{x-2}$

2. Bestimme den maximalen Definitionsbereich, die Nullstellen, alle Asymptoten sowie mögliche Extrema und zeichne den Graphen.

a) $f : x \mapsto \frac{x^2-x}{(x-1)^3}$

b) $f : x \mapsto \frac{6x^2}{3x^2+1}$

c) $f : x \mapsto \frac{3x^3-2x^2+x}{2x^2+1}$

Weitere Aufgaben zu b):

A) An welchen Stellen nimmt die Funktion den Wert 1 an?

B) Stelle im Punkt $P(1 \mid f(1))$ die Gleichung der Tangente auf und zeichne die Tangente ein.

Lösungen:

zu 1.)

a) $f(x) = \frac{2}{x^2}$

b) $f(x) = 4x^3 + \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

d) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

e) $f(x) = \frac{2x-4}{1-x}$

f) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$

g) $f(x) = \frac{x^2-a}{x^3}$; a∈

h) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

i) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

j) $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+4}$

k) $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2}$

l) $f(x) = \frac{4-x}{x-2}$

a) $D_f = \ \backslash \{0\}$ $\quad f'(x) = \frac{x^2 \cdot 0 - 2 \cdot 2x}{\left(x^2\right)^2} = -\frac{4x}{x^4} = -\frac{4}{x^3}$

b) $D_f = \ \backslash \{0\}$ $\quad f'(x) = 12x^2 - \frac{1}{x^2}$

c) $D_f = \ \backslash \{1\}$ $\quad f'(x) = \frac{(1-x)\cdot 1 - (1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$

d) $D_f = \ \backslash \{-1\}$ $\quad f'(x) = \frac{(1+x)\cdot(-1) - (1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2}$

e) $D_f = \ \backslash \{1\}$ $\quad f'(x) = \frac{(1-x)\cdot 2 - (2x-4)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2-2x+2x-4}{(1-x)^2} = -\frac{2}{(1-x)^2}$

f) $D_f = \ \backslash \{0; 2\}$ $\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{0-1\cdot 1}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-2)^2}$

g) $D_f = \ \backslash \{0\}$ $\quad f'(x) = \frac{x^3 \cdot 2x - (x^2-a)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2(2x^2-3x^2+3a)}{x^6} = \frac{-x^2+3a}{x^4}$

h) $D_f =$ $\quad f'(x) = \frac{0 - 1\cdot(x^2+2x+1)'}{(x+1)^4} = \frac{-(2x+2)}{(x+1)^4} = \frac{-2(x+1)}{(x+1)^4} = -\frac{2}{(x+1)^3}$

i) $D_f = \ \backslash \{-1\}$ $\quad f'(x) = \frac{(x+1)\cdot 2x - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

j) $D_f =$ $\quad f'(x) = \frac{(x^2+4)\cdot 2x - (x^2-2)\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2x(x^2+4-x^2+2)}{(x^2+4)^2} = \frac{12x}{(x^2+4)^2}$

k) $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2} = \frac{x^2+4x+4}{x^2}$ $\quad D_f = \ \backslash \{0\}$

$$f'(x) = \frac{x^2(2x+4) - (x^2+4x+4)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3+4x^2-2x^3-8x^2-8x}{x^2}$$

$$= \frac{-4x^2-8x}{x^2} = \frac{-x(4x+8)}{x^2} = -\frac{4x+8}{x}$$

l) $D_f = \ \backslash \{2\}$ $\quad f'(x) = \frac{(x-2)\cdot(-1) - (4-x)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-x+2-4+x}{(x-2)^2} = -\frac{2}{(x-2)^2}$

zu 2.)

a) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - x}{(x-1)^3} \Rightarrow D_f = \quad \setminus \{1\}$

Hinweis: f(x) ist zwar mit (x−1) kürzbar, allerdings bleibt im Nenner weiterhin der Term x−1 übrig ⇒ keine stetig behebbare Definitionslücke bei $x_0 = 1$, sondern Polstelle.

Weiterrechnen mit der gekürzten Term: $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{(x-1)^3} = \dfrac{x(x-1)}{(x-1)^3} = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

Nullstelle: x = 0

Polstelle: $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{x}{(x-1)^2} = \text{"}\frac{>0}{>0}\text{"} = \infty \,; \quad \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{x}{(x-1)^2} = \text{"}\frac{>0}{>0}\text{"} = \infty$$

⇒ Polstelle 2. Ordnung (ohne Vorzeichenwechsel)

⇒ Senkrechte Asymptote: x = 1

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x-1)^2} \approx \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$; entsprechend für $x \to -\propto$

⇒ waagrechte Asymptote y = 0

Ableitung:

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x-1)^2 \cdot 1 - x \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(x-1) - 2x]}{(x-1)^4} = \frac{-x-1}{(x-1)^3}$$

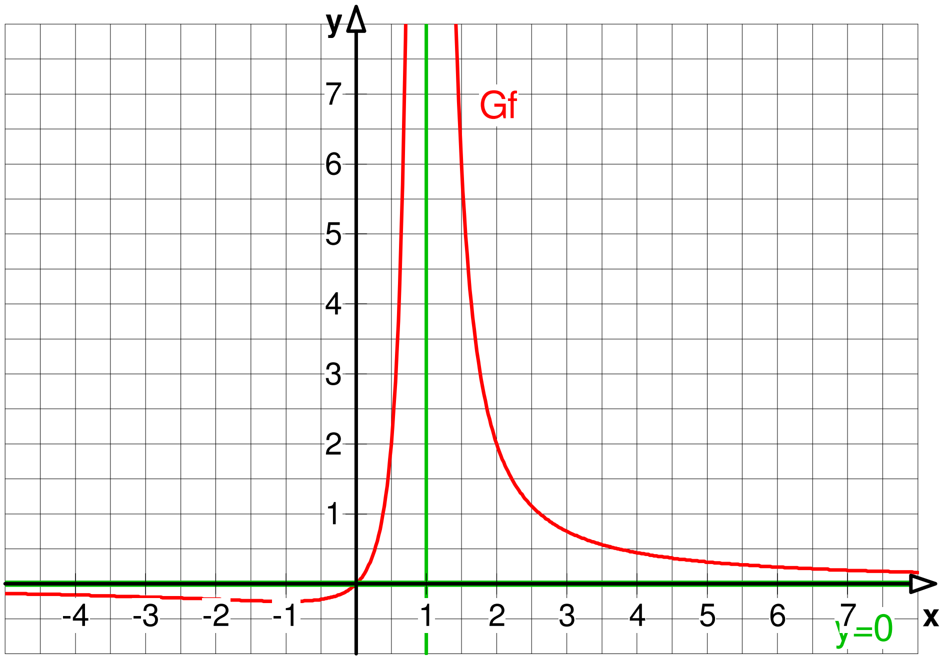
⇒ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ⇒ mögliches Extremum bei E(−1 | f(−1)) bzw. E (−1 | −0,25)

Art des Extremums (evtl. über 2. Ableitung oder) durch Begründung:

für $x \to -1^-$ geht $f(x) \to \propto$; Nullstelle bei x = 0 ⇒ G_f schneidet bei x = 0 die x-Achse und bleibt für x < 0 unterhalb der x-Achse; für $x \to -\propto$ geht $f(x) \to 0$

⇒ E ist ein Tiefpunkt (lokales Minimum)

Graph:



b) $f: x \mapsto \frac{6x^2}{3x^2+1} \Rightarrow D_f =$

Nullstelle: $x = 0$

Polstelle: keine $\Rightarrow$ keine senkrechte Asymptote

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{3x^2+1} \overset{:x^2}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6}{3+\frac{1}{x^2}} = 2 \text{ ; entsprechend für } x \to -\infty$$

$\Rightarrow$ waagrechte Asymptote $y = 2$

Ableitung:

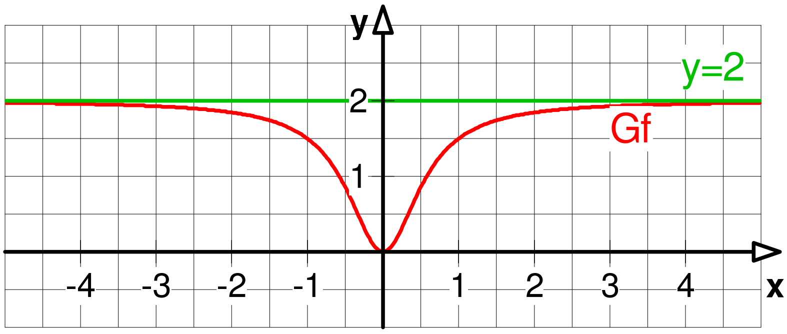
$$f(x) = \frac{6x^2}{3x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(3x^2+1)\cdot 12x - 6x^2 \cdot 6x}{(3x^2+1)^2} = \frac{36x^3+12x-36x^3}{(3x^2+1)^2} = \frac{12x}{(3x^2+1)^2} = \frac{12x}{(3x^2+1)^2}$$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow$ mögliches Extremum bei $E(0 \mid 0)$

Art des Extremums (evtl. über 2. Ableitung oder) durch Begründung:

für $x \to \pm\infty$ geht $f(x) \to \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow$ E ist ein Tiefpunkt (lokales Minimum)

Graph:



Weitere Aufgaben:

A) An welchen Stellen nimmt die Funktion den Wert 1 an?

$f(x) = 1 \Rightarrow \frac{6x^2}{3x^2+1} = 1 \Rightarrow 6x^2 = 3x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow |x| = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}58$

also an den Stellen $x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ und $x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

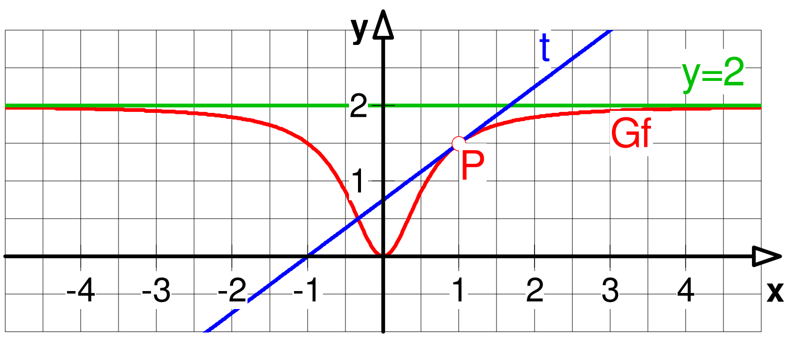
B) Stelle im Punkt $P(1 \mid f(1))$ die Gleichung der Tangente auf und zeichne die Tangente ein.

$f(1) = 1{,}5 \Rightarrow P(1 \mid 1{,}5)$

$$f'(1) = \frac{12}{(3\cdot 1^2+1)^2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Gleichung der Tangente: $y = m\cdot x + t$

mit $m = f'(1) = 0{,}75$ und P folgt: $1{,}5 = 0{,}75\cdot 1 + t \Rightarrow t = 0{,}75 \Rightarrow$ Glg: $\underline{y = 0{,}75x + 0{,}75}$



c) $f: x \mapsto \dfrac{3x^3 - 2x^2 + x}{2x^2 + 1} \Rightarrow D_f =$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow 3x^3 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(3x^2 - 2x + 1) = 0 \Rightarrow$ eine Nullstelle bei $x = 0$

Restterm betrachten:

$$3x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{6} \Rightarrow \text{Radikand negativ} \Rightarrow \text{keine weiteren Nullstellen}$$

Polstelle: keine

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + x}{2x^2 + 1} = \infty \text{, da } x^3 \text{ überwiegt}$$

Da Grad Z = 3 und Grad N = 2 $\Rightarrow$ schiefe Asymptote

Gleichung der schiefen Asymptote durch Polynomdivision

$$\begin{array}{llll}
(3x^3 & -2x^2 & +x &) \ :(2x^2+1) = 1{,}5x - 1 + \dfrac{-0{,}5x+1}{2x^2+1} \\
\underline{3x^3} & & \underline{+1{,}5x} & \\
 & -2x^2 & -0{,}5x & \\
 & \underline{-2x^2} & & \underline{-1} \\
 & & -0{,}5x & +1
\end{array}$$

$\Rightarrow$ Glg: $y = 1{,}5x - 1$

Ableitung:

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + x}{2x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x^2+1)\cdot(9x^2-4x+1) - (3x^3 - 2x^2 + x)\cdot 4x}{(2x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{18x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 9x^2 - 4x + 1 - 12x^4 + 8x^3 - 4x^2}{(2x^2+1)^2} = \frac{6x^4 + 7x^2 - 4x + 1}{(2x^2+1)^2}$$

$\Rightarrow$ Es ist etwas mühsam zu zeigen, dass $f'(x)$ keine Nullstellen hat.
Gehen wir also davon aus, dass es keine Extrema gibt.

Bemerkung: Um den exakten Verlauf des Graphen insb. in der Umgebung des Ursprungs erkennen zu können, müssten weitere Betrachtung wie z. B. die Berechnung verschiedener Funktionswerte und Ableitungswerte durchgeführt werden.

Graph: