Aufgabe3: Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Worum geht es in der Aufgabe?

- Aufstellen von Ebenengleichungen in Parameterform
- Lagebeziehungen von Punkt zu Ebene überprüfen
- Lagebeziehungen von Ebene zu Ebene überprüfen
- Spurpunkte und Spurgeraden von Ebenen ermitteln

Aufgabe:

Gegeben sind die Ebenen E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Überprüfe, ob A(2 | 0 | 1) auf E und / oder F liegt.

b) Zeige an Hand der Richtungsvektoren, dass E und F nicht parallel sind. Bestimme eine Gleichung der Schittgeraden s.

c) Ermittle die Spurpunkte der Schnittgeraden s.

d) Ermittle die Spurgeraden der Ebene E.

e) Zeichne mit Hilfe der Spurpunkte die Ebene E und die Schnittgerade s.

Lösung:

a) $A \in E \Leftrightarrow \vec{a}$ erfüllt die Gleichung für E

$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{lll} \text{I} & 2 = 4-2k & \Rightarrow k=1 \\ \text{II} & 0 = 1 \qquad -1 & \Rightarrow l=1 \\ \text{III} & 1=-3+3k+l & \xrightarrow{k,l} w \end{array} \Rightarrow \text{Gleichungssystem erfüllt} \Rightarrow \underline{\underline{A \in E}}$$

$A \in F \Leftrightarrow \vec{a}$ erfüllt die Gleichung für F

$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\4\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I} & 2=4+2m+4n \\ \text{II} & 0=6+5m+5n \\ \text{III} & 1=4+4m+4n \end{array} \Rightarrow \text{I}-\text{III: } 1=-2m \Rightarrow m=-\tfrac{1}{2}$$

m in I: $2 = 4 - 1 + 4n \Rightarrow n = -\frac{3}{4}$

m in II: $0 = 6 - \frac{5}{2} + 4n \Rightarrow n = \frac{7}{8}$ $\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow \underline{\underline{A \notin F}}$

b) <u>Richtungsvektoren</u> $\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{u}_2$:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right. = 8+0+0+6+10+0 = 24 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{u}_2 \text{ linear unabhängig, d. h. nicht komplanar}$$

<u>Richtungsvektoren</u> $\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{v}_2$:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right. = 2+0+0+12+10+0 = 24 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ linear unabhängig, d. h. nicht komplanar}$$

somit sind E und F nicht parallel.

<u>Bestimmung der Schnittgeraden s</u>:

Ansatz: Gleichsetzen der beiden Paramterfgleichungen

$$\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\4\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}$$

liefert ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 4 Unbekannten $\Rightarrow$ GS ist überbestimmt

Deshalb: man nimmt einen der 4 vorhandenen Parameter, z. B. n, als Paramater der Geradengleichung. D. h. die einzelnen Paramter lassen sich nicht explizit berechnen, jedoch jeweils durch n ausdrücken.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 0=2m+4n+2k \\ \text{II} & -5=5m+5n \qquad +l \\ \text{III} & -7=4m+\ n-3k-l \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{II}+\text{III}=\text{IV} & -12=9m+6n-3k \\ \text{I} & 0=2m+4n+2k \end{array} \Rightarrow 2\text{IV}+3\text{I} \;\; -24 = 24m+24n$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{m=-n-1}}$$

m in I: $0 = 2(-n-1) + 4n + 2k$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{k = 1 - n}}$

m in II: $-5 = 5(-n-1) + 5n + l$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{l = 0}}$

Jetzt sind m , k und l durch n ausgedrückt. Durch Einsetzen von k und l in E bzw. m und n in F erhält man die Geradengleichung für s:

k , l in F $\Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + (1-n)\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - n\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Jetzt nennt man den Paramter einfach um, z. B. in s. Dann gilt: $\underline{\underline{\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}}$.

c) Spurpunkte von s:

in x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0 \Rightarrow 0 = 0 - 3s \quad \Rightarrow s = 0 \quad \Rightarrow S_3(2 \mid 1 \mid 0)$

in x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0 \Rightarrow 0 = 1 \quad \Rightarrow$ W! $\quad \Rightarrow$ kein Spurpunkt

in x_2x_2-Ebene: $x_1 = 0 \Rightarrow 0 = 2 + 2s \quad \Rightarrow s = -1 \quad \Rightarrow S_1(0 \mid 1 \mid 3)$

d) Spurgeraden von E:

1. Möglichkeit: Man ermittelt die Spurpunkte auf den Koordinatenachsen und stellt aus je 2 Spurpunkten die zugehörige Spurgerade auf.

Die Ebenengleichung für E lautet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Daraus folgt für

Spurpunkt auf x_1-Achse: $x_2 = 0$ und $x_3 = 0 \quad \Rightarrow \begin{matrix} \text{II} & 0 = 1 - l \\ \text{III} & 0 = -3 + 3k + l \end{matrix} \Rightarrow l = 1 \; ; \; k = \frac{2}{3}$

k, l in I $\Rightarrow x_1 = 4 + \frac{2}{3} \cdot (-2) = 2\frac{2}{3}$, also $E_1(2\frac{2}{3} \mid 0 \mid 0)$

Spurpunkt auf x_2-Achse: $x_1 = 0$ und $x_3 = 0 \quad \Rightarrow \begin{matrix} \text{I} & 0 = 4 - 2k \\ \text{III} & 0 = -3 + 3k + l \end{matrix} \Rightarrow k = 2 \; ; \; l = -3$

k, l in II $\Rightarrow x_2 = 1 - 3(-1) = 4$, also $E_2(0 \mid 4 \mid 0)$

Spurpunkt auf x_3-Achse: $x_1 = 0$ und $x_2 = 0 \quad \Rightarrow \begin{matrix} \text{I} & 0 = 4 - 2k \\ \text{II} & 0 = 1 - l \end{matrix} \Rightarrow k = 2 \; ; \; l = 1$

k, l in III $\Rightarrow x_3 = -3 + 6 + 1 = 4$, also $E_3(0 \mid 0 \mid 4)$

Damit lassen sich die Spurgeraden aufstellen. In der

x_1x_2-Ebene ist die Spurgerade $s_{12} = E_1E_2$, also s_{12}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda^*\begin{pmatrix} -2\frac{2}{3} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

x_1x_3-Ebene ist die Spurgerade $s_{13} = E_1E_3$, also s_{13}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu^*\begin{pmatrix} -2\frac{2}{3} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

x_2x_3-Ebene ist die Spurgerade $s_{23} = E_2E_3$, also s_{23}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma^*\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Möglichkeit: Spurgeraden sind Schnittgeraden zweier Ebenen, wobei eine Ebene eine Koordinatenebene ist; vgl. dazu b)

Spurgerade mit x_1x_2-Ebene $\vec{x} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$:

Ansatz $\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cl} \text{I} & 4-2k-\lambda=0 \\ \text{II} & 1-l-\mu=0 \\ \text{III} & -3+3k+l=0 \end{array}$

aus I folgt: $\lambda = 4 - 2k$; aus III folgt: $l = 3 - 3k$; aus II folgt: $\mu = 1 - l = 1 - (3 - 3k) = -2 + 3k$

Setzt man λ und μ in die Gleichung der x_1x-Ebene ein, erhält man für die Schnittgerade s_{12}:

s_{12}: $\vec{x} = (4-2k)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (-2+3k)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$

Wie man erkennt stimmt bereits der Richtungsvektor mit der Lösung bei der 1. Möglichkeit überein. Es ist somit noch zu zeigen, dass der Aufhängepunkt $(2\tfrac{2}{3} \mid 0 \mid 0)$ auf der „neuen" Geraden liegt.

Mit $k = \frac{2}{3}$ folgt: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\frac{2}{3}\\0\\0\end{pmatrix}$. Also sind die beiden Geradengleichung gleichwertig.

Entsprechend verfährt man in den beiden anderen Fällen.

e) Zeichnung von E und s